1. kolokwium z Analizy Matematycznej II.1 2023/24
19 grudnia 2023

*W Zadaniu 1 jest pięć podpunktów, których poprawność należy ocenić, wpisując **T** albo **N**. Za każdą poprawną odpowiedź przyznawany jest 1 punkt, za każdą niepoprawną odpowiedź przyznawane jest* -0.5 *pkt.. Za poprawne rozwiązanie całego zadania 1 można więc uzyskać 5 punktów.*

Imię i nazwisko: ______________________________

numer indeksu: ______________________________

Zadanie 1.

☐ Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ spełnia $|f(x)| \le \|x\|^{5/3}$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^2$. Czy wynika stąd, że posiada ona różniczkę Df w zerze?

☐ Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$. Czy wynika stąd, że pochodne cząstkowe funkcji f są ciągłe w punkcie $(0,0)$?

☐ Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, ciagła na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$, a wektor $\mathbf{w}$ jest prostopadły do gradientu funkcji f w $(0,0)$. Czy wynika stąd, że $\mathbf{w}$ jest wektorem stycznym do zbioru $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon f(x,y) = f(0,0)\}$?

☐ Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, a funkcja $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1. Załóżmy, że dla pewnych $x, y \in \Omega$ odcinek $[x,y] \subset \Omega$. Wówczas

$$|f(y) - f(x)| \le \|y - x\| \sup_{\theta \in [0,1]} |Df(x + \theta(y - x))|.$$

☐ Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem otwartym, a $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ ma w punkcie $a \in \Omega$ punkt krytyczny, tzn. $Df(a) = 0$. Ponadto $D^2 f(a) \ge 0$. Czy wynika stąd, że f ma w a minimum lokalne?

Za każde z zadań 2-4 można uzyskać 10 punktów. Rozwiązanie należy oddać na osobnej kartce, podpisanej swoim imieniem i nazwiskiem, numerem indeksu. Rozwiązanie należy szczegółowo uzasadnić, powołując się na fakty znane z wykładu bądź z ćwiczeń.

Zadanie 2. Wyznaczyć kresy funkcji

$$f(x,y) = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2}$$

na zbiorze $D = \{(x,y)\colon \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \leq 1\}$.

Zadanie 3. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym, wypukłym i niech $f\colon A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na A, różniczkowalną w punktach wewnętrznych zbioru A. Zakładamy ponadto, że istnieją liczby $a_1, \ldots a_n$, nie wszystkie równe zeru, takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$$

dla każdego $x \in \operatorname{int} A$. Udowodnić, że funkcja f osiąga swoją wartość maksymalną i wartość minimalną w pewnych punktach brzegu zbioru A.

Zadanie 4. Obliczyć odległość między zbiorami A i B na płaszczyźnie, gdzie

$$A = \{(\cos(t)\sin(2t), \sin(t)\sin(2t)) : t \in R\},$$

oraz $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2\}$.